Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. Mathematics IV Semester Examination - July 2023

Paper : (MSMM403CCT) Calculus of Variations and Integral Equations

پرچہ : تغیرات احصاء اور تکملی مساواتیں

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/ مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر 1۔

(i) فنکشنل (Functional) کی تعریف کرو۔

(ii) فارم (form) $I=\int_a^b f(x,y')\,dx$ کے ایک فنکشنل (Functional) کے لئے Euler کی مساوات ---------- ہے

(a) $f_{y'}=c$ (b) $f-y'f_{y'}=c$ (c) $f_y=c$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) Variational problems کی تعریف کرو۔

(iv) Brachistochrone problem کا extremizing curve ہے

(a) دائرہ (circle) (b) کیٹینری (catenary) (c) سائکلائیڈ (cycloid) (d) خط (line)

(v) ایک function کے differential کی تعریف کرو۔

(vi) ایک فنکشنل (Functional) کے variation کی تعریف کرو۔

(vii) Fredholm Integral equation کی تعریف کرو۔

(viii) Symmetric kernel کی تعریف کرو۔

(ix) یہ Integral equation $y(t)+\lambda\int_a^x e^{x-t}y(t)\,dt=0$ ---------- ہے

(a) Fredholm IE of first kind (b) Fredholm IE of second kind

(c) Volterra IE of first kind (d) Volterra IE of second kind

(x) Initial Value Problem کو Fredholm Integral Equation میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ (صحیح/غلط)

حصہ دوم

(2) فنکشنل (Functional) $I\left[y(x)\right]=\int_0^{\pi/2}\left\{(y')^2-y^2\right\}dx$ ، $y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ کا extremal معلوم کرو۔

(3) فنکشنل (Functional) $I\left[y(x)\right]=\int_0^{1}\left(1+(y'')^2\right)dx$ ، کا extremal معلوم کرو جبکہ

$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=1,\ y'(1)=1$ ہیں۔

(4) فنکشنل (Functional) $I\left[y(x)\right]=\int_0^{\pi/2}\left(y''^2-y^2+x^2\right)dx,$ کے extremal معلوم کرو جبکہ

$y(0)=1, y(\pi/2)=0;\ y'(0)=0, y'(\pi/2)=-1$ Boundary conditions ہیں۔

(5) ثابت کرو کہ مساوات $I\left[y(x)\right]=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx$ کے extremum کے لئے ضروری شرط (necessary condition)

$\delta I=\delta\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx=0$ ہے۔

(6) بتلاؤ کہ function $y(x)=e^x\left(2x-\frac{2}{3}\right)$ ، Integral equation $y(x)+2\int_0^1 e^{x-t}y(t)dt=2xe^x$ کا حل ہے۔

(7) IVP $y''-\sin x\,y'+e^x y=x$ ، $y(0)=0,\ y'(0)=-1$ کو Integral equation میں تبدیل کرو۔

(8) بتلاؤ کہ Integral equation $y(x)=\lambda\int_0^1 e^{x+t}y(t)dt$ کے eigenvalues اور eigenfunctions نہیں ہونگے۔

(9) Successive approximation کے طریقے کو استعمال کر کے Volterra Integral equation

$\varphi(x)=1+x-\int_0^x\varphi(t)dt$ ، $\varphi_0(x)=1$ کا حل معلوم کرو۔

حصہ سوم

(10) Isoperimetric problem $I\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(y'^2+x^2\right)dx,$ کے extremals معلوم کرو، دیا گیا ہیں

$\int_0^1 y^2dx=2; y(0)=0, y(1)=0.$ ۔

(11) Circle $x^2+y^2=1$ اور straight line $x+y=4$ کے درمیان shortest distance معلوم کرو۔

(12) Integral equation $y(x)=\lambda\int_{-1}^1\left(5xt^3+4x^2t+3xt\right)y(t)dt$ کے eigen values اور eigen functions

معلوم کرو۔

(13) Resolvent kernel کے ذریعے Integral equation $y(x)=\frac{3}{2}e^x-\frac{3}{2}xe^x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 t\,y(t)dt$ کا حل معلوم کرو ۔

(14) Integral equation $y(x)=\cos x-x-2+\int_0^x(t-x)y(t)dt$ کا حل معلوم کرو ۔

☆ ☆ ☆