Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) I Semester Examination, December 2023

MSMM101CCT : Real Analysis - I

پرچہ : حقیقی تجزیہ - I

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو **(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) $Inf\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$

(a) 1 (b) 0 (c) 1/2 (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) اگر $A=\{1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots,1000\}$ ہو تب A کے Limit Points کا سٹ ہے۔

(a) $\{1\}$ (b) ϕ (c) A (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) Bounded Below Set کی ایک مثال دو۔

(iv) $1+r+r^2+\ldots$ Convergent ہوگا اگر۔

(a) $|r|<1$ (b) $|r|\geq 1$ (c) $r<-1$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) (X, d) Metric Space کا سٹ X اوپن Open ہے۔ (صحیح/غلط)

(vi) اگر $A\subseteq X$ ہو تب $\overline{A}$ (X, d) میں Closed Set ہے۔ (صحیح/غلط)

(vii) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$ $x=o' f(0)=0$ پر

(a) Differentiable ہے (b) Differentiable نہیں ہے

(c) Continuous نہیں ہے (d) ان میں سے کوئی نہیں

(viii) $L(P,f,\alpha)$ کی تعریف کرو۔

(ix) Uniform Convergence کی تعریف کرو۔

(x) اگر $f(x)=x^2$ ، $P=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ ہو تب L(P,f) ....ہوگا۔

حصہ دوم

(2) تعریف کرو۔

(i) Bounded سٹ (ii) کسی سیٹ کا Least Upper Bound

(iii) کسی سیٹ کا Greatest Lower Bound اور ہر ایک کی ایک مثال دو۔

(3) یک رنگی تواتر (Monotonic Sequence) کی تعریف کرو اور ایک مثال دو۔ ثابت کرو کہ

$< S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n} >$ متدق (Convergent) ہے۔

(4) Metric Space کی تعریف کرو بتلاؤ کہ $\mathbb{R}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ بجواب $d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ ایک $\mathbb{R}$ Metric Space ہے۔

(5) فرض کرو کہ X,Y دو Metric Spaces ہیں $E \subset X$ p , E کا Limit Point ہے اور $f:E \to Y$ ایک تفاعل تب بتلاؤ کہ

$\lim_{x \to p} f(x)=q$ ہوگا $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} < f(p_n) >= q$ E کے ہر تواتر $p_n \to p$ کے لیے۔

(6) تفاعل $f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ & (x \neq 0) \end{cases}$ کی Continuity اور Differentiability پر بحث کرو۔

(7) ثابت کرو۔ $\underline{\int_a^b} f d\alpha \le \overline{\int_a^b} f d\alpha$

(8) تفاعل $f(x)=x^2 \ \forall x \in [0,1]$ اور $P=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\}$ کے لیے U(P,f) اور L(P,f) معلوم کرو۔

(9) اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ E پر ایک Sequence of Functions اس طرح ہے کہ $\forall x \in E, n=1,2,3\ldots \ |f_n(x)| \le M_n$

تب Σf_n Converge ہوگا اگر ΣM_n Converge ہو۔

حصہ سوم

(10) تعریف کرو: (i) Absolute Convergence (ii) Conditional Convergence

سلسلہ $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots.$ کے Absolute اور Conditional Convergence کی جانچ کرو۔

(11) فرض کرو کہ (X, d) ایک Metric Space ہے۔ اور $E \subseteq X$ تب ثابت کرو کہ E کھلا سٹ (Open Set) ہوگا $\Leftrightarrow$ E^c بند (Closed) ہے۔

(12) Compact Set کی تعریف کرو ثابت کرو کہ Compact Set کا ہر بند تحت سٹ (Closed Subset) Compact ہوگا۔

(13) Riemann–Stieltjes integral کی تعریف کرو اور اس کے استعمال سے بتلاؤ کہ $\int_1^2 (3x+1)\,dx = \frac{11}{2}$ ہے۔

(14) کسی سٹ E پر Sequence of Functions کے Uniform Convergence کے Cauchy Criteria کو بیان اور ثابت کرو۔

☆☆☆