مولانا آزاد نیشنل اردو یونیورسٹی

Question Paper (Regular Mode) December 2023

Programme: M.Sc (Mathematics) - پروگرام: ایم ایس سی (ریاضی)

1st Semester پہلا سمسٹر

Title & Paper Code : MSMM102CCT : Linear Algebra

وقت : Time : 3 Hrs گھنٹے | جملہ نشانات : 70 Maximum. Marks

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات (3) حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیے لفظوں کی تعداد اشارۃ ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں (10) لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات / خالی جگہ پُر کرنا / مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے (1) نمبر مختص ہے۔
(10 x 1 = 10 Marks)
2. حصہ دوم میں (8) سوالات ہیں، اس میں سے طالب علم کو کوئی (5) سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دو سو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے (6) نمبرات مختص ہیں۔
(5 x 6 = 30 Marks)
3. حصہ سوم میں (5) سوالات ہیں۔ اس میں سے طالب علم کو کوئی (3) سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو (500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے (10) نمبرات مختص ہیں۔
(3 x 10 = 30 Marks)

حصہ اول

سوال : 1

(i) جانچ کیجیے کہ u اور v لینیر لی ڈیپینڈینٹ (Linearly dependent) ہیں جہاں پر $u = (2, 4, -8)$, $v = (3, 6, -12)$

(ii) بتائیے کہ مندرجہ ذیل R^3 کا basis ہے۔

(a) (1, 1, 1), (1, 0, 1) (b) (1, 2, 3), (1, 3, 5), (1, 0, 1), (2, 3, 0)

(iii) مندرجہ ذیل میں dimension معلوم کیجیے۔

(a) Hom $(P_3(t), R^2)$ (b) Hom $(M_{2,3}, R^4)$

(iv) اگر $F : V \to U$ ایک linear map ہے تب Kernel F (Ker F) کی تعریف کیجیے۔

(v) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ کے لیے characterstic polynomial معلوم کیجیے۔

(vi) مونک پولینومیل (monic polynomial) کی تعریف کیجیے۔

(vii) کسی vector کی نورم سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟ مثال دے کر سمجھائیے۔

(viii) $\|2u - 3v\|^2 =$

(ix) کسی ویکٹر اسپیس کے basis کی تعریف بیان کیجیے۔

(x) ویکٹر اسپیس کی کنہیں دو subspaces کا intersection بھی ایک subspace ہوتا ہے۔ (صحیح / غلط)

حصہ دوم

2. فرض کیجیے کہ دو یا زیادہ غیر صفر (non - zero) ویکٹرس $v_1, \ldots, v_m$ لینیر لی ڈپینڈینٹ (linearly dependent) ہیں تب ان میں سے ایک سابقہ (Preceding) ویکٹرس کا linear combination ہوگا۔

3. فرض کیجیے کہ $V = R^3$، ثابت کیجیے کہ W ویکٹر اسپیس (vector space) V کا subspace نہیں ہے۔ جہاں پر
(a) $W = \{(a,b,c) : a \geq 0\}$ (b) $W = \{(a,b,c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$

4. فرض کیجیے کہ $F : R^2 \to R^2$ ایک میپ ہے۔ ثابت کیجیے کہ
(a) F (x,y) = (x+y, x) Linear ہے۔ (b) F (x, y) = (xy, x) Linear نہیں ہے۔

5. فرض کیجیے کہ $F : V \to U$ linear میپ ہے۔ تب ثابت کیجیے کہ
(a) ImF ویکٹر اسپیس U کا subspace ہے۔ (b) KerF V کا subspace ہے۔

6. فرض کیجیے کہ linear operator $T : V \to V$ کے لیے λ ایک eigen value ہے۔ تب ثابت کیجیے کہ E_λ $(eigen - space\, of\, \lambda)$ V کا subspace ہوتا ہے۔

7. ثابت کیجیے کہ مندرجہ ذیل برابر (equivalent) ہیں۔
(a) کوئی اسکیلر (scalar) λ A matrix کا eigen value ہے۔
(b) matrix $\lambda I - A$ سنگلور ہے۔
(c) λ، matrix A کی characterstic polynomials کا ایک root ہے۔

8. Cauchy - Schwarz inequality کو بیان اور ثابت کیجیے۔

9. فرض کیجیے کہ S، غیر صفری (non-zero) ویکٹرس کا orthogonal set ہے۔ تب ثابت کیجیے کہ S، linearly independent ہے۔

حصہ سوم

10. فرض کیجیے کہ V کسی Field K پر ایک ویکٹر اسپیس ہے۔ تب ثابت کیجیے کہ
(a) k 0 = 0 (b) 0u = 0 (c) $ku = 0 \Rightarrow k = 0\, or\, u = 0$ (d) (-k) u = K (-u) = - ku

11. فرض کیجیے کہ $G : R^3 \to R^3$ ایک linear mapping ہے۔ جہاں پر $G(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$ مندرجہ ذیل کا basis اور dimension معلوم کیجیے۔
(a) Im G (b) Ker G

12. فرض کیجیے کہ $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

(a) تمام eigen values اوران سے وابسطہ eigne vectors معلوم کیجیے۔

(b) Matrices P اور D معلوم کیجیے جہاں پر P ایک non-singular matrix ہےاور $D = P^{-1}AP$ diagonal ہے۔

13. فرض کیجیے کہ U، ویکٹراسپیس R^4 کا subspace ہےجس کومندرجہ ذیل ویکٹر span کرتے ہیں۔

$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 4)$, $v_3 = (1, 2, -4, -3)$

تب مندرجہ ذیل کوحاصل کیجیے۔

(a) U کا orthogonal basis

(b) U کا orthonormal basis

14. (i) ثابت کیجیے کہ کسی matrix A اوراس کے transpose A^T کی ایک ہی characterstic polynomial ہوتی ہے۔

(ii) K کی قدرمعلوم کیجیے جبکہ $u = (1, 2, k, 3)$ اور $v = (3, k, 7, -5)$ ویکٹراسپیس R^4 میں orthogonal ہوں۔

(iii) فرض کیجیے کہ $F : R^2 \rightarrow R^2$ ایک linear mapping ہے جہاں پر $F(x, y) = (3x + 4y, 2x - 5y)$ اور $E = \{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$ کوئی R^2 کا basis ہے۔ تب matrix A معلوم کیجیے جو F کو basis E کی نسبت پر ظاہر کرے۔

(iv) فرض کیجیے کہ $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (1, 3, 2)$, $u_3 = (0, 1, 3)$ ویکٹراسپیس R^3 کاایک basis S بناتے ہیں۔ تب P (Change of basis matrix) ، basis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ سے S پر معلوم کیجیے۔

☆☆☆