Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. (Maths) III Semester Examination, December 2023

MSMM302CCT : Advanced Algebra

پرچہ : ایڈوانسڈ الجبرا

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) $\alpha = \sqrt{2}$ ‘Q’ پر Algebraic ہے۔ (صحیح / غلط)

(ii) کسی Field F کے Algebraic Closure کی تعریف کرو۔

(iii) $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{5}}$ کا Minimal Polynomial معلوم کرو۔

(iv) $\mathbb{R}$ کا Normal Extension ہے۔

(a) $\mathbb{Q}$ (b) $\mathbb{R}$ (c) $\mathbb{C}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) Simple Root کی تعریف کرو۔

(vi) Prime Field کی ایک مثال دو۔

(vii) Perfect Field کی ایک مثال دو۔

(viii) $\left| G\left[\frac{E}{F}\right] \right| \geq |\text{Aut(E)}|$ (صحیح / غلط)

(ix) Cyclotomic Polynomial کی تعریف کرو۔

(x) زاویہ (Angle) α کو Constructible کب کہتے ہیں؟

حصہ دوم

(2) Minimal Polynomial کی تعریف کرو۔

$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ اور $\alpha=\sqrt{1-\sqrt{3}}$ کے Minimal Polynomial معلوم کرو۔

(3) Gauss Lemma کو بیان اور ثابت کرو۔

(4) تعریف کرو(i) Splitting Field (ii) Normal Extension اور (iii) Separable Extension

(5) فرض کرو کہ $f(x)\in F[x]$ ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ ≥ 1 degree ہے اور α ایک Root ہے تب α ' f(x) کا Multiple Root ہوگا $\Leftrightarrow f^{1}(x)=0$ ۔

(6) ثابت کرو میدان (Field) F کا ہر Prime Field یا $\mathbb{Z}_p$ Q سے Isomorphic ہوگا۔

(7) Galois Group کی تعریف کرو۔اگر F=Q اور $E=Q(\sqrt[3]{2})$ ہو تب $G\left[Q\left[\sqrt[3]{2}\right]\backslash Q\right]$ معلوم کرو۔

(8) Fixed Field کی تعریف کرو۔بتلاؤ کہ Fixed Field E_H, E کی Sub Field ہے۔

(9) Ruler & Compass کی مدد سے معلوم کرو کہ ذیل کے کون سے اعداد Constructible ہے۔

$\alpha=\sqrt{3+1}$ (i) $\qquad$ $\alpha=\sqrt[3]{2}+1$ (ii)

حصہ سوم

(10) تعریف کرو۔ (i) Monic Polynomial $\qquad$ (ii) Primitive Polynomial اور ایک مثال دو: ثابت کرو کہ

$f(x)\in F[x]$ پر Reducible ہے۔ $\Leftrightarrow f(x)$ کا ایک $'\alpha' root$ F میں ہوگا جب کہ 2=deg(f(x) یا 3 ہے۔

(11) Eisensteins Criteria کو بیان اور ثابت کرو۔بتلاؤ کہ $f(x)=x^3-5x+10$ Q پر Irreducible ہے۔

(12) Finite Extension کی تعریف کرو ایک مثال دو۔ثابت کرو کہ Finite Field کا Finite Extention، Separable Extension ہوگا۔

(13) ثابت کرو کہ گروپ $G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ جہاں $\alpha^5=1$، $\alpha\neq 1$ ہیں رتبہ 4 والے Cyclic Group سے Isomorphic ہے۔

(14) Ruler اور Compass کے طریقے سے بتلاؤ کہ ایک زاویہ وجود رکھتا ہے جس کے تین برابر کے حصے نہیں ہوسکتے۔

☆☆☆