Maulana Azad National Urdu University

M.Sc. Maths (MSMM303CCT) III Semester Examination -December - 2023

Paper : Finite Difference Method

پرچہ : محدود فرقی طریقے

Time : 3 hrs **Marks : 70**

ہدایات:

یہ پرچہ سُوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینالازمی ہے۔

1. **حصہ اول** میں **10** لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. **حصہ دوم** میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو **(200)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے **6** نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. **حصہ سوم** میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو**(500)** لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے**10** نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) دی گئی p.d.e $xu_{xx} + u_{yy} = 0$ ، $x > 0$ کے لیے __________ ہے۔

(a) parabolic (b) elliptic (c) Hyperbolic (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho(x, y)$ کی difference scheme لکھیے۔

(iii) FDE اور PDE کے درمیان difference کو __________ کہتے ہیں۔

(a) Consistency (b) Truncation error (c) Numerical error (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iv) $\frac{\partial u}{\partial t}$ کی central difference scheme __________ ہے۔

(a) $\frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{k}$ (b) $\frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k}$ (c) $\frac{U_m^{n-1} - U_m^{n+1}}{2k}$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(v) $\lambda = k/h^2$ کو __________ کہتے ہے۔

(a) Mesh ratio (b) Mesh Points (c) Lattice Points (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vi) $u_t + u_x = 0$ کی explicit scheme __________ ہے۔

(a) Stable (b) Not stable (c) Conditionally stable (d) ان میں سے کوئی نہیں

(vii) Leap frog difference scheme ____________ پر stable ہے۔

(a) $0<r<1$ (b) $0\le r<1$ (c) $0<r\le 1$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

(viii) Leap frog فرقی اسکیم (difference scheme) ____________ level کی ہے۔

(a) ایک (b) دو (c) تین (d) ان میں سے کوئی نہیں

(ix) اگر $r=\frac{3}{4}$, $h=\frac{1}{4}$ تب $k=$ ________ ۔

(a) 3/6 (b) 1/3 (c) 1/16 (d) ان میں سے کوئی نہیں

(x) poission's equation کا truncation error order ____________ ۔

(a) $O\left(h^2\right)$ (b) $O\left(k^2\right)$ (c) $O(k+h)$ (d) ان میں سے کوئی نہیں

حصہ دوم

(2) بتلاؤ کہ دی گئی PDE $u_t=u_{xx}$ کے Truncation error کا order $O\left(k+h^2\right)$ ہے۔

(3) دی گئی PDE $u_t=u_{xx}$ کا فرقی اسکیم (difference scheme) لکھو Laasonen کے طریقے سے۔

(4) دی گئی فرقی اسکیم (difference scheme) $U_m^n=(1-2\lambda)U_m^{n+1}-\lambda\left(U_{m+1}^{n+1}+U_{m-1}^{n-1}\right)$ کا order of truncation error معلوم کرو۔

(5) دی گئی PDE $u_t=u_{xx}$ کا فرقی اسکیم (difference scheme)، Crank Nicolson کے طریقے سے معلوم کرو۔

(6) دی گئی Hyperbolic equation $u_t+u_x=0$ کے explicit difference scheme لکھواور اس کے stability کی جانچ کرو۔

(7) دی گئی فرقی اسکیم (difference scheme) $U_m^{n+1}=2\left(1-r^2\right)U_m^n+r^2\left(U_{m+1}^n+U_{m-1}^n\right)-U_m^{n-1}$ کا order of truncation error معلوم کرو۔

(8) ثابت کریں کہ دی گئی فرقی اسکیم (difference scheme) $U_m^{n+1}=(1-r)U_m^n+rU_{m-1}^n$ conditionally stable ہے۔

(9) Dirichlet problem for laplace equation کی lower order فرقی اسکیم (difference scheme) لکھو۔

حصہ سوم

(10) دی گئی PDE $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ کا فرقی اسکیم (difference scheme) Dufort Frankel کے طریقے سے معلوم کرو اور اس کا order of truncation error بھی معلوم کرو۔

(11) دی گئی مساوات $u_t=u_{xx}$ جس کے ابتدائی اور سرحدی شرائط (initial and boundary conditions)

$$u(x,0)=\sin(\pi x) \quad ; \; 0\le x\le 1$$
$$u(0,t)=0; u(1,t)=0$$

اور جس کی فرقی اسکیم (difference scheme), schmidth method سے دی گئی ہے $U_m^{n+1}=(1-2\lambda)U_m^n+\lambda(U_{m+1}^n+U_{m-1}^n)$ جہاں $h=\frac{1}{3}, k=\frac{1}{36}$ کے لیے two time level تک حل کرو۔

(12) $u_x=-u_t$ کا Lax wendroff formula اخذ (derive) کرو اور اس کی stability کی جانچ کرو۔

(13) دی گئی مساوات $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، $0\le x\le 1$ جس کے ابتدائی اور سرحدی شرائط (initial and boundary conditions)

$$u(x,0)=\sin(\pi x) \quad ; \; 0\le x\le 1$$
$$u_t(x,0)=0 \quad ; \; 0\le x\le 1$$
$$u(0,t)=0; u(1,t)=0 \quad ; t>0$$

اور جس کی فرقی اسکیم (difference scheme) دی گئی ہے

$U_m^{n+1}=2(1-r^2)U_m^n+r^2(U_{m+1}^n+U_{m-1}^n)-U_m^{n-1}$ ہے جہاں $r=\frac{3}{4}, h=\frac{1}{4}$ کے لیے two time step تک حل کرو۔

(14) Higher order laplace equaion کے لیے Dirichlet's problem لکھو۔

☆☆☆