Maulana Azad National Urdu University

PhD (Mathematics) Coursework I Semester, Examination, December 2023

PHMM102CCT: Essential Mathematics

Time : 3 hrs | Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم۔ ہر جواب کے لیےلفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔ **(10 x 1 = 10 Marks)**
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔ **(5 x 6 = 30 Marks)**
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے10 نمبرات مختص ہیں۔ **(3 x 10 = 30 Marks)**

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) مندرجہ ذیل تفرقی مساوات $\frac{d^4y}{dx^4}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}=xe^x$ لینیر ہے۔ (صحیح/غلط)

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ کی degree..................ہے۔

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) ان میں سے کوئی نہیں

(iii) $z=px+qy+p^2+q^2$ کا complete integral لکھیے۔

(iv) مندرجہ مساوات

$$x^2zp+y^2zq=xy$$

ایک Quasi-Linear مساوات ہے۔ (صحیح/غلط)

(v) نورمل سبگروپ کی تعریف کیجیے۔

(vi) Euclidean domain کی ایک مثال دیجیے۔

(vii) فرض کیجیے کہ R ایک رنگ ہے اور $f(x),g(x)\in R[x]$

(a) $\deg(f(x)g(x))<\deg+(x)+\deg g(x)$

(b) $\deg(f(x)g(x))>\deg+(x)+\deg g(x)$

(c) $\deg(f(x)g(x))\le\deg f(x)+\deg g(x)$

(d) $\deg(f(x)g(x))\ge\deg f(x)+\deg g(x)$

(viii) کومپیکٹ سٹ کی تعریف کیجیے۔

(ix) فرض کیجیے کہ τ_1 اور τ_2 دو ٹوپولوجی ہیں تب $\tau_1\cup\tau_2$ بھی ایک ٹوپولوجی ہوگی۔ (صحیح/غلط)

(x) تحت رنگ کی تعریف بیان کیجیے۔

P.T.O.

حصہ دوم

(2) فرض کیجیے کہ $X = R$ اور $\tau = \{\phi, G \subseteq R, x \in G \Rightarrow -x \in G\}$ تب ثابت کیجیے کہ (x, τ) ایک ٹوپولوجیکل اسپیس ہے۔

(3) کنورجینٹ سیکوینس کی تعریف کیجیے۔ثابت کیجیے کہ ہرایک کنورجینٹ سیکوینس باؤنڈیڈ ہوتی ہے۔

(4) فرض کیجیے کہ S اور T کسی رنگ R کے دو ideals ہیں۔تب ثابت کیجیے کہ $S \cap T$ بھی R میں ایک ideal ہے۔

(5) ثابت کیجیے کہ کوئی (ہرایک) میدان (field) ایک انٹگرال ڈومین ہوتا ہے۔

(6) حل کیجیے: $\left(x^2 - y^2 - z^2\right)p + 2xyq = 2xz$

(7) حل کیجیے: $z = p^2 - q^2$

(8) ثابت کیجیے کہ $x = \infty$ مساوات $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ کا ریگولر سنگولر پوائنٹ ہے۔

(9) حل کیجیے $x^3 \dfrac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 2y = 10\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

حصہ سوم

(10) حل کیجیے $\dfrac{dy^2}{dx^2} + 9y = \sec 3x$ ۔

(11) $p_1^3 + p_2^2 + p_3 = 1$ کا complete integral معلوم کیجیے۔

(12) فرض کیجیے کہ R ایک رنگ ہے تب ثابت کیجیے کہ

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, 0 رنگ R کا Zero element ہے۔

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

(iii) $\forall a, b \in R,\ (-a)(-b) = a \cdot b$

(13) "Tychonoff theorem" کو بیان اور ثابت کیجیے۔

(14) (i) فرض کیجیے کہ X ایک I.P.S ہے اور $\forall x, y \in X$ تب ثابت کیجیے کہ

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(ii) ثابت کیجیے کہ $y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \sin 2x$ مساوات، $y'' + 4y = 0$ کا حل ہے۔

(iii) a اور b کو eliminate کرکے $z = \left(x^2 + a\right)\left(y^2 + b\right)$ کا حل معلوم کیجیے۔

(iv) "Field Extension" کی تعریف کیجیے اور ایک مثال بھی پیش کیجیے۔

☆☆☆