Maulana Azad National Urdu University

PhD (Mathematics) Coursework I Semester, Examination, December 2023

PHMM103DST: Pure Mathematics

Time : 3 hrs　　　　Marks : 70

ہدایات:

یہ پرچہ سوالات تین حصوں پر مشتمل ہے: حصہ اول، حصہ دوم، حصہ سوم- ہر جواب کے لئے لفظوں کی تعداد اشارۃً ہے۔ تمام حصوں سے سوالوں کا جواب دینا لازمی ہے۔

1. حصہ اول میں 10 لازمی سوالات ہیں جو کہ معروضی سوالات/ خالی جگہ پُر کرنا/مختصر جواب والے سوالات ہیں۔ ہر سوال کا جواب لازمی ہے۔ ہر سوال کے لیے 1 نمبر مختص ہے۔
(10 x 1 = 10 Marks)
2. حصہ دوم میں آٹھ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی پانچ سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً دوسو (200) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 6 نمبرات مختص ہیں۔
(5 x 6 = 30 Marks)
3. حصہ سوم میں پانچ سوالات ہیں۔اس میں سے طالب علم کو کوئی تین سوالوں کے جواب دینے ہیں۔ ہر سوال کا جواب تقریباً پانچ سو(500) لفظوں پر مشتمل ہے۔ ہر سوال کے لیے 10 نمبرات مختص ہیں۔
(3 x 10 = 30 Marks)

حصہ اول

سوال نمبر : 1

(i) رنگ $R = \{0,1,2,3,4,5\}, +_6, \times_6$ کے zero divisors ہیں۔

(a) $\{0,1\}$　(b) $\{2,3\}$　(c) $\{2,3,4\}$　(d) کوئی بھی نہیں

(ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3 \in Q[x]$ reducible ہے۔

(a) $\mathbb{Q}$ پر　(b) $\mathbb{R}$ پر　(c) $\mathbb{C}$ پر　(d) کوئی بھی نہیں

(iii) ایک ہم مارفیت (homomorphism) $\phi : G \to G^1$ جس کا Kernel، K ہے 1-1 ہوگا $\Leftrightarrow$

(a) $K = \phi$　(b) $K = G$　(c) $K = \{e\}$　(d) کوئی بھی نہیں

(iv) $2x^5 - 5x^4 + 5$، Q پر reducible ہے۔ (صحیح/غلط)

(v) Contraction Map کی تعریف کرو۔

(vi) Translation Map کے کتنے Fixed Points ہونگے۔

(a) 1　(b) 2　(c) 3　(d) 0

(vii) گروپ کے action کی تعریف کرو۔

(viii) G ایک گروپ ہے اور X=G تب $\theta : G \times X \to X$ جس کی تعریف $\theta(a,x) = axa$ ایک گروپ action ہے۔ (صحیح/غلط)

(ix) Fuzzy Set سٹ کی ایک مثال دیجیے۔

(x) Soft سٹ کی ایک مثال دیجیے۔

حصہ دوم

(2) Minimal Polynomial کی تعریف کرو اور

(i) $\alpha = \sqrt{1-\sqrt{3}}$　(ii) $\alpha = \sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ کے minimal polynomials معلوم کرو۔

P.T.O.

(3) Gauss Lemma کو بیان اور ثابت کرو۔

(4) اگر $\theta : G \times X \to X$ جہاں $X = \{xH / x \in G, H < G\}$ کی تعریف $\theta(a, xH) = axH$ ہو تو بتلاؤ کہ θ ایک گروپ action ہے۔

(5) فرض کرو کہ G ایک group action ہے اور X پر act کرتا ہے تب بتلاؤ کہ X کے عناصر (elements) کے orbits X کا Partition بناتے ہیں۔

(6) Contraction Map کی ایک مثال دو اور بتلاؤ کہ ہر Contraction Map، Uniformly Continuous ہوتا ہے۔

(7) فرض کرو کہ $X = R$ ایک Banach Space $\|x\| = |x|$ کے تحت ہے اور $[a,b] \subset R$ اگر $f : [a,b] \to [a,b]$ ایک differentiable function اس طرح ہے کہ $|f'(x)| \le k < 1$ تب بتلاؤ کہ $f(x)$ کا $x = f(x)$ ایک حل ہوگا۔

(8) t-level set کی تعریف کرو ایک مثال دو۔

(9) دو Soft Sets کے Union اور Intersection کی تعریف کرو ایک مثال دو۔

حصہ سوم

(10) رنگ کے maximal ideal کی تعریف کرو ایک مثال دو۔ اگر R ایک Commutative Ring اکائی کے ساتھ ہو تب اس کا ideal M، maximal ہوگا $\Leftrightarrow$ R/M ایک field ہے۔

(11) Algebraic Extension، Finite Extension کی تعریف ایک مثال کے ذریعہ کرو۔ بتلاؤ کہ ہر finite extension ایک Algebraic Extension ہے۔

(12) اگر θ گروپ G کا سٹ $X \neq \phi$ پر action ہے $a \in G$ کے لیے اگر $f_\theta \quad (a)(x) = \theta(a,x) \quad \forall x \in X$ ہو تب ثابت کرو کہ $f_\theta(a)$ ایک Permutation ہے۔ بتلاؤ کہ $f_\theta : G \to S(X)$ ایک homomorphisim ہوگا نیز اس کے Kernel کی تعریف کرو۔

(13) Banach Contraction Principle کی مدد سے بتلاؤ کہ ایک System of Linear Equations کا حل وجود رکھتا ہے۔

(14) ایک مثال کے ذریعہ تعریف کرو:

(i) دو fuzzy sets کا Union

(ii) دو fuzzy sets کا Intersection

(iii) دو fuzzy sets کا Complement

(iv) fuzzy set کا image

☆☆☆